

Бранко Б. Пејовић*, **Мишир Д. Перушић**, **Владан М. Мићић**,
Горан С. Тадић, **Стефан М. Павловић**

Технолошки факултет, Зворник, Универзитет у Источном Сарајеву,
Република Српска, Босна и Херцеговина

Једна могућност графичког представљања енергетских величина реалног гаса за карактеристичну промену стања

Стручни рад

У раду је за карактеристичну квазистатичку изотермску промену стања реалног гаса, дајено графичко представљање односно одређивање најважнијих енергетских величина у h - s и T - s дијаграмима. Користећи основну теорему диференцијалног рачуна, односно I и II закон термодинамике написан у диференцијалном облику, изведена је општа зависност која је омогућила прецизну графичку конструкцију за одређивање најважнијих величина процеса (технички рад и размјењена количина топлоте) у h - s дијаграму, преко одговарајућих дужи које представљају висинске разлике. Изведена графичка конструкција, примјењена је на два карактеристична случаја у истом дијаграму. Прелазно је извршено и поређење са истом променом стања за случај идеалног гаса.

У другом делу рада, полазећи од чињенице да су за приказивање промена стања реалног гаса многа погоднији координатни системи h , s и T , s него p , v систем, даји је предлоз за графичко представљање промене енталпије и унутрашње енергије у топлоћном T - s дијаграму. Искоришћене су линије константне енталпије и унутрашње енергије, односно њихове пресечне линије са изобаром и изохором, које пролазе кроз крајњу тачку анализираних промена стања. Показано је да се промена енталпије и унутрашње енергије у T - s дијаграму може представити планиметријски преко одговарајућих површина.

На бази одређене промене енталпије и унутрашње енергије, користећи оба карактеристична облика I закона термодинамике, показано је да је поред размјењене количине топлоте, могуће и зајемински и технички рад, за усвојену промену стања реалног гаса, такође графички представити у T - s дијаграму преко одговарајућих еквивалентних површина, што је била и основна идеја рада.

Приказана графичка решења у односу на аналитичка, омогућују ефикасније теоријско изучавање и представљање посматраног термодинамичког процеса са различитих аспектa, и знајно помажу јаснијем сагледавању проблема и побољшању међусобног сорадуемања.

Кључне речи: реални гасови и паре, изотермска квазистатичка промена, енергетске термодинамичке величине T - s и h - s дијаграми, диференцијални рачун, графичко представљање величина, графичке конструкције

* Одговорни аутор; електронска адреса: b.pejovic@gmail.com

Уводна разматрања

Код реалних гасова и пара, није познат аналитички израз за једначину стања али су зато познати у великом броју случајева детаљно испитани дијаграми стања који су принципијелно потпуно еквивалентни аналитичкој једначини стања [1–4]. Због тога, анализа промене стања реалних гасова, разликоваће се од анализе идеалног гаса само у погледу математичке форме. Чак би се могла избећи и ова незнатна разлика, пошто би се и идеалан гас могао анализирати само графички и табеларно, што су за реалан гас углавном једине могућности.

Термодинамички дијаграми представљају пројекције термодинамичких површина из тродимензионалног простора у одговарајућој равни односно дводимензионалан координатни систем [5–8]. Ови дијаграми за разлику од термодинамичких површина, користе се при инжењерској анализи и пројектовању процеса хемијске и средње индустрије [9–11]. Примењују се као методе за приказивање и корелисање термодинамичких величина и за представљање и анализу квазистатичких процеса преко одговарајућих линија промена стања које су у дијаграмима уцртане. Геометријска интерпретација корелација за одређивање термодинамичких величина омогућава успостављање модела физичког понашања супстанције која се лакше разуме и анализира у односу на одговарајућа теоријска разматрања.

Развој савремених рачунара, са великим графичким могућностима приказивања резултата, омогућио је примену сложених једначина стања на конструисање термодинамичких дијаграма, уз истовремено израчунавање свих потребних величина стања.

У термодинамици реалних гасова и пара за проучавање и представљање разних процеса користе се различити дијаграми. При овоме, повољнији су координатни системи T - s и h - s него p - v систем, сл. 1. Исти се могу добити директним пресликавањем стања из p , v дијаграма [3–4, 12–13, 24–25].

Најважније промене стања реалног гаса су при константним p , T , v и s , док су ређе присутне промене при константним h и x .

Под квазистатичким променама, које су погодне за изучавање у термодинамици, подразумевамо промене са механичком равнотежом односно малом брзином моларног кретања материје [13–17, 26, 27].

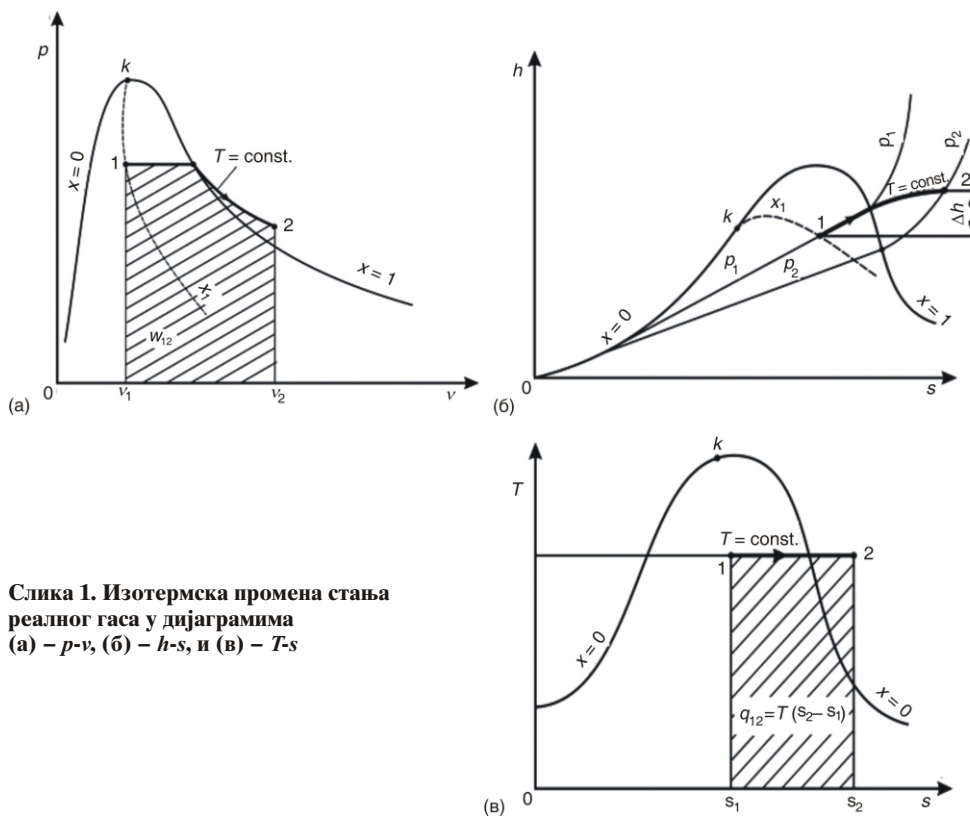
За случај адијабатске промене мора се имати податак о неквазистатичности да би била потпуно одређена, односно дефинисана.

Предмет истраживања у раду је квазистатичка изотермска промена стања реалног гаса, из разлога што је ова промена на неки начин сложенија од осталих и има неке одређене специфичности. Исто тако, за разлику од осталих промена стања овде су присутне све енергетске величине. Показано је да је могуће сличну анализу урадити и за остале промене стања при чему се морају уважавати њихове карактеристике.

Полазећи од аналитичког израза I и II закона термодинамике за квазистатичку изотерму, размењена количина топлоте, запремински рад и технички рад биће [2, 5, 7, 9, 18–20, 28]:

$$\begin{aligned} q_{12} & T(s_2 \ s_1) \\ w_{12} & T(s_2 \ s_1) (u_2 \ u_1) \\ w_{t12} & T(s_2 \ s_1) (h_2 \ h_1) \end{aligned} \quad (1)$$

Уколико је изотерма неквазистатичка, мора бити познат други податак (на пример пораст ентропије услед неквазистатичности Δs_{nk}). Изрази (1) и за овај случај



Слика 1. Изотермска промена стања реалног гаса у дијаграмима (а) – $p-v$, (б) – $h-s$, и (в) – $T-s$

остају у важности, само уместо $s_2 - s_1$, треба уврстити квазистатички део промене ентропије, тј. Δs_{nk} .

Приказ изотермске промене стања за водену пару као најзначајнијег реалног гаса у карактеристичним дијаграмима $p-v$, $h-s$ и $T-s$, принципијелно је дат на сл. 1, [10, 21–23, 29].

На овим дијаграмима, шрафиране површине представљају спољне утицаје w_{12} и q_{12} . Ово се односи на радни $p-v$ односно топлотни $T-s$ дијаграму, с обзиром да за њих важе релације [7, 8, 13, 20, 21, 24, 28]:

$$\begin{aligned}
 q_{12} &= \int_1^2 T(s) ds \\
 w_{12} &= \int_1^2 p(v) dv \\
 w_{t12} &= \int_1^2 v(p) dp
 \end{aligned} \tag{2}$$

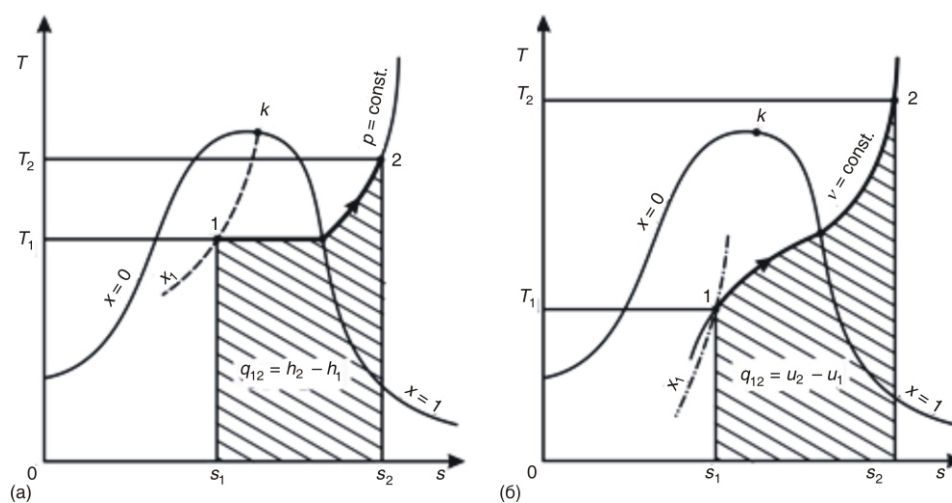
За изобарску промену стања према диференцијалном облику I закона термодинамике, размењена количина топлоте биће [1, 5, 13, 25, 27]:

$$dq = dh - vdp, \quad p = \text{const.}, \quad dp = 0, \quad q_{12} = h_2 - h_1 \tag{3}$$

Исто тако за изохорску промену биће, [3], [8], [22].

$$dq = du - pdv, \quad v = \text{const.}, \quad dv = 0, \quad q_{12} = u_2 - u_1 \quad (4)$$

Из релација (3) и (4) следи да се у T - s дијаграму реалног гаса, промене енталпије $\Delta h = h_2 - h_1$ и унутрашње енергије $\Delta u = u_2 - u_1$, графички могу представити као површина испод изобаре односно изохоре, означене са 1-2, према сл. 2.



Слика 2. Представљање промене енталпије и унутрашње енергије реалног гаса у T - s дијаграму за промене $p = \text{const.}$, $v = \text{const}$

Анализа на бази графичке конструкције у h - s дијаграму

У наставку, за случај изотермске промене реалног гаса, је дата једна анализа на бази графичке конструкције у h - s дијаграму, која ће омогућити једноставно одређивање карактеристичних енергетских величина.

Претходно је извршена анализа на једноставнијем случају, односно примеру идеалног гаса такође за изотермску промену стања. Након тога иста анализа је дата за сложенији случај реалног гаса.

Напоменимо да су неке од приказаних анализа у h - s дијаграму, делимично дате, на пример у литератури [4, 5, 11, 13, 19, 20, 26, 29], али је у раду приказана нешто шира анализа и другачији математички приступ и интерпретација са могућностима примене на карактеристичним примерима.

Случај идеалног гаса

Други диференцијални облик I закона термодинамике је:

$$dq = dh - vdp \quad (5)$$

За квазистатичку промену стања према II закону термодинамике (његов диференцијални облик), је:

$$dq = Tds \quad (6)$$

Када је у питању изобарска промена стања из релација (5) и (6) следи да је:

$$(dq)_p = Tds = dh, \quad p = \text{const.}, \quad dp = 0 \quad (7)$$

Из једнакости (7), уводећи парцијални извод, добијамо:

$$\left. \frac{dh}{ds} \right|_p = T \quad (8)$$

Како h s представља коефицијент правца тангенте у h - s дијаграму, то у случају изобарске промјене према сл. 3, морају сви коефицијенти правца изобара у тачкама пресека са изотермом бити исти и једнаки T [K]. За случај идеалног гаса, изотерма се поклапа са изенталпом у h - s дијаграму.

Ако у тачки 2, у h - s дијаграму повучемо тангенту на криву $p = p_2 = \text{const.}$, онда ће за њен угао нагиба према h оси важити релација:

$$\text{tg} \alpha = \left. \frac{dh}{ds} \right|_{p_2} = T_1 = T \quad (9)$$

Исто ће важити и за изобару p_1 , у чијој је тачки 1 конструисана тангента t' :

$$\text{tg} \alpha = \left. \frac{dh}{ds} \right|_{p_1} = T_1 = T \quad (10)$$

Према томе, тангенте t' и t биће међусобно паралелне. Са слике 3 даље следи да је:

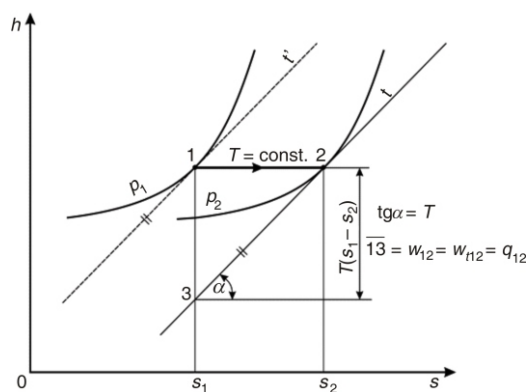
$$(s_1 - s_2) \text{tg} \alpha = h_1 - h_3 = h_2 - h_3 = T(s_2 - s_1) \quad (11)$$

Сада због релације (6), односно према I закону термодинамике биће коначно:

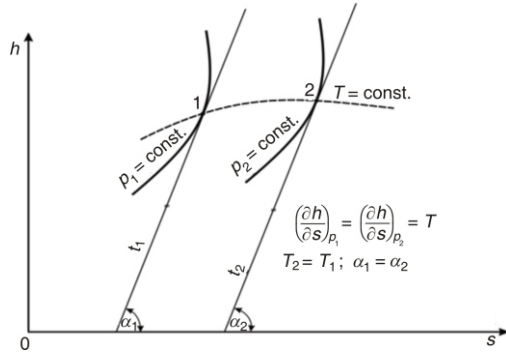
$$q_{12} = T(s_2 - s_1) = w_{12} = w_{i12} \quad (12)$$

$$q_{12} = h_2 - h_3 = w_{12} = w_{i12} \quad [\text{Jkg}^{-1}] \quad (13)$$

Према томе, дуж $\overline{13}$ представља запремински рад, технички рад и размењену топлоту, односно њихове апсолутне вредности. Очита је предност мерења у дијаграму h - s јер се мери дужина уместо површине, што је случај у дијаграмима p - v односно T - s .



Слика 3. Одређивање енергетских величина за изотермску промену стања у h - s дијаграму за случај идеалног гаса



Слика 4. Једна особина изотерме реалног гаса

Случај реалног гаса

Сличан приступ као код идеалног гаса може се применити код реалног гаса. Овде је за разлику од идеалног гаса, изотерма крива линија. Посматрајмо према сл. 4 изотермску промену стања $T = \text{const.}$, са почетним стањем 1 и крајњим стањем 2.

Уочимо две изобаре p_1 и p_2 које пролазе кроз тачке 1 и 2. Према I и II закону термодинамике биће, с обзиром да је $dp = 0$ [17, 20, 21]:

$$\frac{dq}{dh} = \frac{dh - v dp}{T ds} \quad (14)$$

Одавде, с обзиром на парцијалне изводе, биће:

$$\frac{\partial h}{\partial s} \Big|_p = T \quad \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_{p_1} = T_1 \quad \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_{p_2} = T_2 \quad (15)$$

где је $T_1 = T_2 = T = \text{const.}$

Нагиб тангенте на изобаре $p_1 = \text{const.}$ и $p_2 = \text{const.}$ у тачкама 1 и 2, једнак је температури у тим стањима. Ово важи за било коју тачку на изотерми $T = \text{const.}$

Произвольна изобара за случај реалног гаса, сл. 5, има у општем случају праволинијски ток до горње граничне криве означене са G.G.K (до тачке c). Изнад, у подручју прегрејане паре, изобара има криволинијски облик (повија се на горе).

Уочимо сада две произвољне изотерме T_1 и T_2 које секу изобару у тачкама 1 и 2. С обзиром на релацију (15) за овај случај за тачке 1 и 2, важиће да је:

$$\frac{\partial h}{\partial s} \Big|_p = T_1 \quad \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_p = T_2 \quad (16)$$

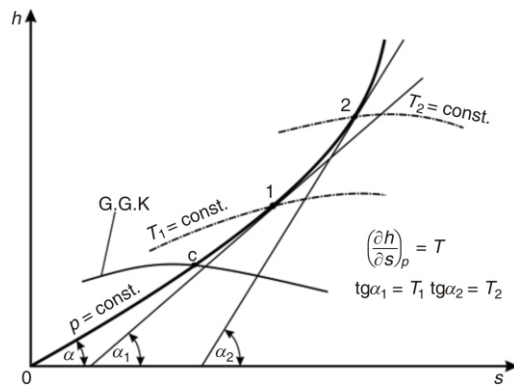
односно нагиб тангенте t_1 односно t_2 у тачкама 1 и 2 је:

$$\begin{aligned} \text{tg} \alpha_1 &= T_1 \\ \text{tg} \alpha_2 &= T_2 \end{aligned} \quad (17)$$

У подручју влажне паре (испод горње граничне криве), изобаре $p = \text{const.}$ су праве линије, јер је дуж тих линија и $T_s = \text{const.}$ Према томе, нагиб ове праве према апсциси биће:

$$\text{tg} \alpha = T_s \quad (18)$$

За детаљнију анализу, према сл. 6, посматраћемо произвољну изотерму



Слика 5. Једна особина изобаре реалног гаса

ску промену 12 ($T = \text{const.}$), где је тачка 1 у подручју влажне паре, а тачка 2 у подручју прегрејане паре. Процес се у општем случају одвија између две изобаре p_1 и p_2 . Према претходној анализи, нагиб тангенте t_2 на изобару $p_2 = \text{const.}$ у тачки 2 једнак је температури у том стању (T_2). Онда је и нагиб тангенте t_1 на изобару $p_1 = \text{const.}$ у тачки 1 и свима до тачке c (на горњој граничној кривој) такође једнак $T_1 = T_s$. С обзиром да је $T_1 = T_2 = T = \text{const.}$, тангенте t_1 и t_2 морају бити међусобно паралелне. Према томе изобаре прегрејане паре су криве линије чији нагиб расте са порастом температуре, али све изобаре имају исти нагиб у пресечним тачкама са истом изотермом. У области влажне паре изобаре су праве линије, јер је дуж тих линија $T = \text{const.}$ Исто тако следи да се изобара прегрејаног подручја тангентно наставља на свој праволинијски део у области влажне паре (тангента t_1). Из претходног следи да се за случај квазистатичке изотерме, технички рад и размењена топлота одређују графички на сличан начин као код идеалног гаса (види поглавље *Случај идеалног гаса*). Овде се дуж изотерме мења енталпија па се и ово мора узети у обзир.

Према сл. 6, технички рад изотерме може да се одреди односно прикаже у h - s дијаграму на два начина, као дужине:

$$w_{t_{12}} = \overline{1a} - \overline{2b} \quad (19)$$

при чему је $\overline{1a} = \overline{ed}$.

Очигледно да је конструисани четвороугао $1a2b$, паралелограм. Исто тако се размењена количина топлоте, с обзиром да је $q_{12} = w_{t_{12}} + (h_2 - h_1)$, такође може да се одреди односно прикаже на два начина, као дужине, тј.:

$$q_{12} = T(s_2 - s_1) = \overline{2e} - \overline{bd} \quad (20)$$

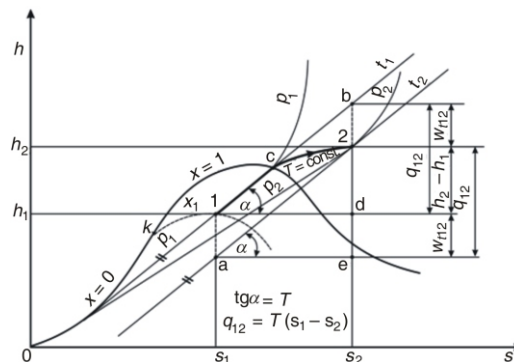
што следи из нагиба тангенте на изобару:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{2e}}{\overline{ae}} = \frac{\overline{bd}}{\overline{1d}} = \frac{q_{12}}{\Delta s} = \frac{T(s_2 - s_1)}{s_2 - s_1} = T, \quad (T_1 = T_2 = T) \quad (21)$$

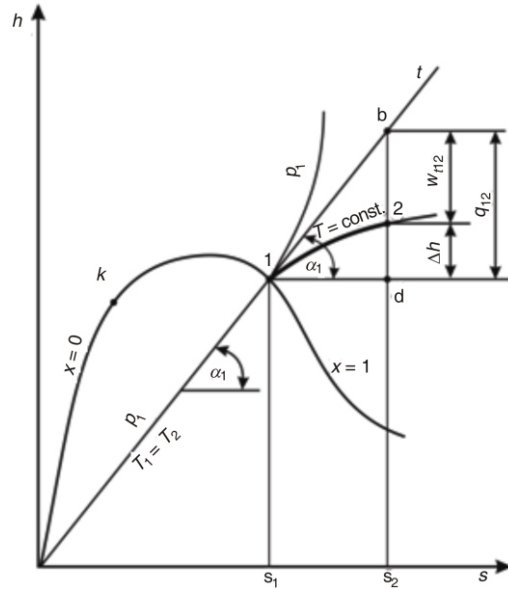
при чему су посматрани троуглови $1bd$, односно $a2e$.

Треба запазити да су овде тангенте прецизно одређене, јер су паралелне са равнотежном изобаром ($t_1 \parallel t_2$). Очигледно, за случај конструкције тангенте код других промена стања, биће неопходно претходно одређивање круга кривине.

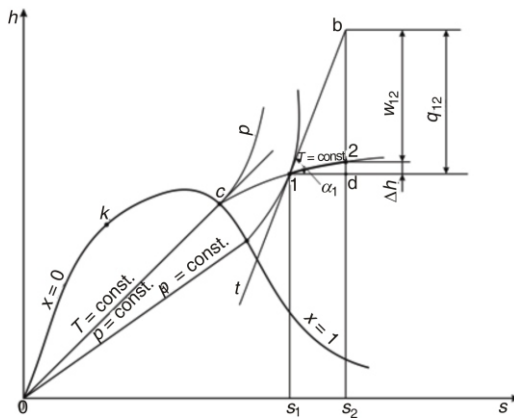
У наставку, је приказана анализа два карактеристична случаја изотермске промене реалног гаса, такође у h - s дијаграму. Први случај, био би када је почетна тачка 1 на горњој граничној кривој, а крајња тачка 2 у подручју прегрејане паре, сл. 7.



Слика 6. Приказ одређивања основних енергетских величина за изотермску промену реалног гаса у h - s дијаграму за општи случај



Слика 7. Први карактеристичан случај изотермске промене стања реалног гаса



Слика 8. Други карактеристичан случај изотермске промене реалног гаса

Одређивање карактеристичних енергетских величина односно њихово представљање, за овај случај изводи се конструисањем правоуглог троугла 1bd.

Нагиб тангенте t на изобару p_1 у почетној тачки 1 је:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{bd}}{\overline{1d}} = \frac{q_{12}}{s_2 - s_1} = \frac{T(s_2 - s_1)}{s_2 - s_1} = T, (T_1 \quad T_2 \quad T) \quad (22)$$

Значи, овде је размењена количина топлоте за промену 12 представљена са дужи db, док је технички рад представљен са дужи 2b, што следи из I закона термодинамике. Конструкција се изводи једноставно, само се продужи праволинијски део изобаре.

Други карактеристичан случај изотермске промене реалног гаса је када су обе тачке 1 и 2 у прегрејаном подручју, сл. 8.

За овај случај, кроз почетну тачку 1 пролази изобара p_1 , у коју конструисамо тангенту t . Тангента гради са хоризонталом угао α_1 . Одређивање карактеристичних енергетских величина односно њихово представљање изводи се конструисањем правоуглог троугла 1bd. И у овом случају нагиб тангенте t на изобару p_1 у тачки 1 биће:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{bd}}{\overline{1d}} = \frac{q_{12}}{s_2 - s_1} = \frac{T(s_2 - s_1)}{s_2 - s_1} = T \quad (23)$$

($T \quad T_1 \quad T_2$)

Технички рад w_{t12} представљен је са дужи $\overline{2b}$, а размењена количина топлоте са дужи db. За оба карактеристична случаја, очигледно је задовољен I закон термодинамике $q_{12} = w_{t12} + \Delta h$.

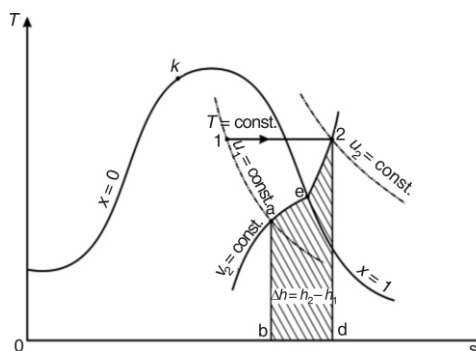
Могућ је и трећи случај када су тачке 1 и 2 у подручју влажне паре. Тада је нагиб тангенте потпуно одређен праволинијским делом изотерме, односно одговарајуће изобаре, па се величине процеса једноставно одређују.

Графичко представљање промене енталпије и унутрашње енергије реалног гаса за изотермску промену у T - s дијаграму

Полазећи од релације (3), за изобарску промену стања ($p = \text{const.}$) реалног гаса, размењена количина топлоте q_{12} једнака је промени енталпије Δh , што је у топлотном дијаграму T - s представљено шрафираним површином испод изобаре 12, сл. 2(а).

Ако сада према сл. 9 у T - s дијаграму, нацртамо изобару, $p_2 = \text{const.}$ која одговара тачки 2, промена енталпије Δh за изотерму 1 и 2 можемо графички приказати на следећи начин.

С обзиром да T - s дијаграм реалног гаса садржи и изенталпе (линије константне енталпије ($h = \text{const.}$), то тачкама 1 и 2 одговарају изенталпе $h_1 = \text{const.}$, $h_2 = \text{const.}$ Изенталпа $h_1 = \text{const.}$, сече изобару $p_2 = \text{const.}$ у тачки а при чему је $h_1 = h_a$. Размењена количина топлоте, односно промена енталпије ($q_{12} = \Delta h$), за изобарску промену стања, сл. 2(а), представљају се у T - s дијаграму са одговарајућом површином испод изобаре. Одавде следи да се промена енталпије $\Delta h = h_2 - h_1$, за посматрану изотермску промену 12 може представити (односно одредити) преко приказане шрафиране површине, према сл. 9, тј.:



Слика 9. Графичко представљање промене енталпије реалног гаса за изотермску промену у T - s дијаграму

$$\Delta h = h_2 - h_1 = F(ae2dc) \quad (24)$$

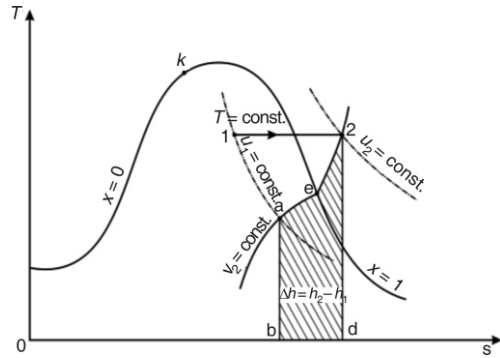
Разлог овоме је тај што изобара $p_2 = \text{const.}$ пролази кроз тачку 2 (којој одговара енталпија h_2), док тачки а одговара изенталпа која пролази кроз тачку 1 ($h_1 = h_a$). Значи промена енталпије изобарске промене а2, једнака је промени енталпије изотерме 12, с обзиром да је:

$$h_2 - h_a = h_2 - h_1 \quad (25)$$

Слична идеја, може да се примени и за представљање промене унутрашње енергије Δu реалног гаса, такође за изотермску промену стања 12 у T - s дијаграму, под претпоставком да су у истом дијаграму уцртане линије константне унутрашње енергије.

С обзиром да је према релацији, за изохорску промену ($v = \text{const.}$) код реалног гаса, размењена количина топлоте једнака је промени унутрашње енергије ($q_{12} = \Delta u$), то се иста може представити као површина испод изохоре у T - s дијаграму, сл. 2(б).

Ако према сл. 10, за тачку 2, посматрамо одговарајућу изохору $v_2 = \text{const.}$, то следи да тачкама 1 и 2 одговарају линије константне унутрашње енергије $u_1 = \text{const.}$ и $u_2 = \text{const.}$ Линија $u_1 = \text{const.}$, сече изохору $v_2 = \text{const.}$ у тачки а. Размењена количина топлоте односно промена унутрашње енергије за изохорску промену а2 једнака је шрафираној површини. С обзиром да је унутрашња енергија у тачки а једнака



Слика 10. Графичко представљање промене унутрашње енергије реалног гаса за изотермску промену у T - s дијаграму

унутрашњој енергији у тачки 1 ($u_a = u_1$), то следи да се промена унутрашње енергије изотермска промена 12 може представити преко површине као:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = F(ae2db) \quad (26)$$

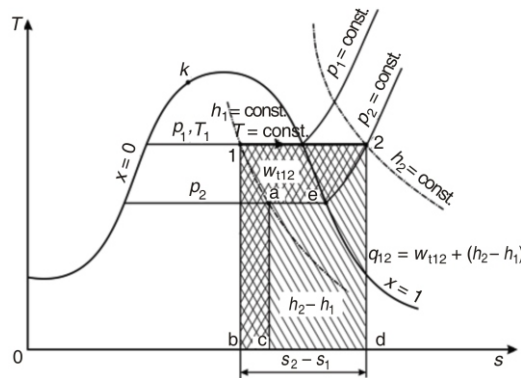
Значи промена унутрашње енергије изохорске промене a_2 једнака је промени унутрашње енергије изотерме 12 тј.:

$$u_2 - u_a = u_2 - u_1 \quad (27)$$

Овде треба нагласити да су у првом случају искоришћене линије константне енталпије, а у другом линије константне унутрашње енергије. Разлог овоме је коришћени први односно други облик првог закона термодинамике.

Графичко представљање енергетских величина реалног гаса за изотермску промену у T - s дијаграму

Користећи анализу дату у претходном поглављу могу се графички представити (односно одредити), све карактеристичне енергетске величине реалног гаса за изотермску промену у топлотном T - s дијаграму. Као што је показано, (сл. 9), промени енталпије $h_2 - h_1$ одговара површини $F(ae2dc)$ испред изобаре $p_2 = \text{const.}$, сл. 11.



Слика 11. Представљање техничког рада реалног гаса за изотермску промену у T - s дијаграму

С обзиром да према II закону термодинамике, за изотермску промену реалног гаса важи да је $dq = Tds$, размењена количина топлоте представљена је површином испод изотерме 12 у T - s дијаграму (сл. 11):

$$q_{12} = T(s_2 - s_1) = T(12db) \quad (28)$$

Исто тако из релације за I закон термодинамике $q_{12} = w_{112} \Delta h$, следи да је $w_{112} = q_{12} - \Delta h$, што значи да се технички рад у T - s дијаграму може представити унакрсно шрафираном површином, према сл. 11.

При овоме је:

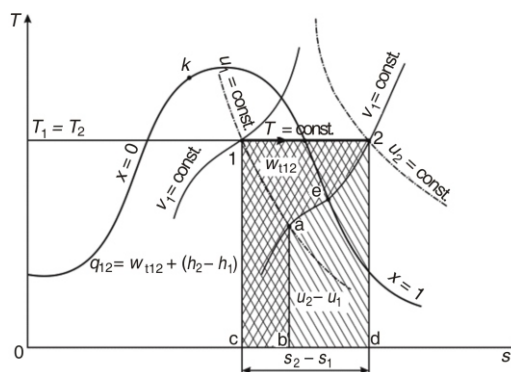
$$w_{112} = q_{12} - (h_2 - h_1) = F(12db) - F(ae2dc) \quad (29)$$

односно:

$$w_{112} = F(12eacb) \quad (30)$$

што следи са сл. 11. При овоме, површине се алгебарски сабирају, водећи рачуна о знаку енергетске величине.

Слична идеја може се применити и за представљање запреминског рада w_{12} реалног гаса такође за изотермску промену стања 12 у истом дијаграму. Полазећи од анализе приказану на сл. 10, промена унутрашње енергије за изотерму 12 једнака је површини $F(ae2db)$, што је приказано и на сл. 12. Као и у претходном случају, размењена количина топлоте q_{12} за изотерму 1 и 2, може да се представи површином правоугаоника $F(12dc)$. Из релације за I закон термодинамике, $q_{12} = w_{12} + \Delta u$, следи да је запремински рад $w_{12} = q_{12} - \Delta u$. Сада је очигледно да се запремински рад w_{12} у топлотном T - s дијаграму може представити дупло шрафираном површином према сл. 12 тј.:



Слика 12. Представљање запреминског рада реалног гаса за изотермску промену у T - s дијаграму

$$w_{12} = q_{12} - (u_2 - u_1) = F(12dc) - F(ae2db) \quad (31)$$

односно

$$w_{12} = F(ae2db) \quad (32)$$

Планиметријско одређивање енергетских величина у T - s дијаграму

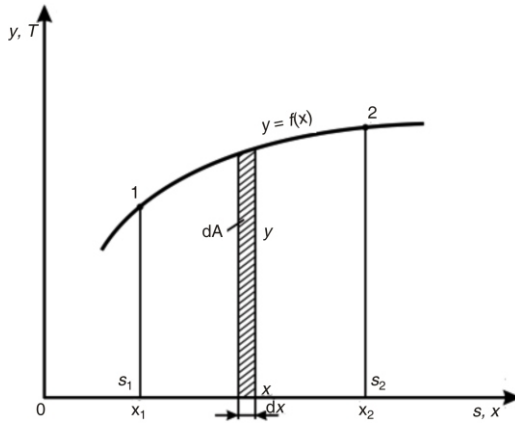
У поглављу *Анализа на бази графичке конструкције у h - s дијаграму*, показано је да су поједине енергетске величине представљене одређеним дужинама у h - s дијаграму (сл. 6). Очигледно је да је у том случају њихово одређивање једноставно. Тражена величина се може очитати директно са дијаграма као разлика ординате или множењем измерене дужине са размером у којој је нацртан дијаграм. Исто тако у оба претходна поглавља показано је да се неке енергетске величине у T - s дијаграму представљају одговарајућом површином. Да би се у овом случају добили употребљиви резултати, уколико би се желела одредити нека енергетска величина у квантитативном смислу, неопходно је површину нпр. у mm^2 , помножити одређеним коефицијентом размере k_p , који је у наставку одређен.

Површину у T - s дијаграму, ако је исти нацртан у одређеној размери, могуће је одредити неком од математичких нумеричких метода.

Узмимо према сл. 13 да је нека величина стања представљена у T - s дијаграму кривом $y=f(x)$. Уведимо координатни систем y, x чије се осе поклапају са системом T, s .

Површина испод криве $y = f(x)$, од почетне тачке 1 до крајње тачке 2 биће:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_{s_1}^{s_2} \frac{T}{u_T u_s} ds = \frac{1}{u_T u_s} \int_{s_1}^{s_2} T ds \quad [\text{mm}^2] \quad (33)$$



Слика 13. Извођење коефицијента размере за планиметријско одређивање енергетских величина

Овде се произвољна ордината T и апсциса s , могу одредити као:

$$T = y u_T \quad s = x u_s \quad (34)$$

где су размере за апсолутну температуру u_T [K/mm] и специфична ентропија u_s [Jkg⁻¹K⁻¹mm⁻¹], у којима је конструисан T - s дијаграм.

Одавде следи да је:

$$y \frac{T}{u_T} ds = u_s dx \quad (35)$$

Величине из релације (35), замењене су у релацији (33).

Узимајући у обзир II закон термодинамике, релација (33) прелази у:

$$A \frac{q_{12}}{u_T u_s} = A u_T u_s \quad (36)$$

Димензионо према релацији (36) следи да је:

$$q_{12} \text{ [mm}^2\text{]} \frac{\text{K}}{\text{mm}} \frac{\text{J/kgK}}{\text{mm}} \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (37)$$

Слична анализа, очигледно важи и за било коју другу енергетску величину изражену такође у [Jkg⁻¹]. Према томе да би добили неку од енергетских величина (q_{12} , Δu , Δh , w_{12} , w_{112}) у квантитативном смислу, с обзиром на релацију (36), потребно је одговарајућу површину из T - s дијаграма у [mm²], помножити са коефицијентом размере k_p , тј.

$$q_{12} = A k_p \frac{\text{J}}{\text{kg}} e_{12} = A k_p \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (38)$$

Овде је према релацији (36):

$$k_p = u_T u_s \frac{\text{K}}{\text{mm}} \frac{\text{J/kgK}}{\text{mm}} \frac{\text{J}}{\text{mm}^2} \quad (39)$$

док је e_{12} нека од горе наведених енергетских величина. Очигледно је да у овом случају све посматране енергетске величине имају исту димензију као q , пошто су представљене у истом дијаграму. Из релације (38) следи да је у општем случају нека енергетска величина пропорционална одговарајућој површини у T - s дијаграму.

При овоме, увек се добија апсолутна вредност енергетске величине, која као што је познато може имати и негативне вредности, о чему се мора водити рачуна.

Закључак

Датом анализом, показано је да је T - s дијаграм погодан за графичко представљање најважнијих енергетских величина на прегледан начин преко дефинисаних површина. Одавде произилази да су могућности овог дијаграма доста велике с обзиром да се исти користи углавном за представљање размењене количине топлоте. На пример, могу се на прегледан начин сагледати разни утицаји промена стања на енергетске величине. Исто тако, као што је показано, и h - s дијаграм може се ефикасно искористити за тачно одређивање и графичко представљање појединих енергетских величина, преко назначених дужина.

У дијаграмима T - s и h - s , могуће је представити скоро све промене стања реалног гаса као површине, односно линије, тако да исти пружају много више могућности за анализу процеса, него што је то случај са p - v дијаграмом.

Графичко представљање енергетских величина у h - s и T - s дијаграмима, омогућује јасније и прегледније праћење, квалитативну анализу, као и управљање односно оптимизацију термодинамичких процеса. Исто тако при овој пружена је већа могућност за разне компарације и ефикасније прорачуне при пројектовању ових процеса.

Графички приказ спољних утицаја, односно енергетских величина у приказаним дијаграмима, омогућује да се још јасније уочи веза између тих утицаја и промена стања, као и њихови међусобни односи.

Развој савремених рачунара са великим могућностима, данас омогућава прецизно практично представљање сложених процеса као и квантитативне прорачуне, на пример преко дефинисаних површина.

Приказана методологија може се без неких већих потешкоћа применити и код других карактеристичних промена стања реалног и идеалног гаса. При томе се морају узети у обзир карактеристике и специфичности сваке промене. Исто тако било би интересантно, на бази предложеног поступка главне енергетске величине представити и у p - v дијаграму, такође за различите промене стања.

Литература

- [1] Трибус, М., *Термодинамика и термодинамика*, Енергија, Москва, 1998
- [2] Вукаловић, М. П., Новиков, И. И., *Термодинамика*, Машиностроение, Москва, 1996
- [3] Schmidt, E., *Einführung in die technische Thermodynamik*, Springer-Verlag, Leipzig, Deutschland, 1998
- [4] Вејник, А. И., *Техническаја термодинамика*, Металургиздам, Москва, 1998
- [5] Rant, Z., *Termodinamika, Knjiga za uk i prakso*, Fakultet za strojništvo, Univerza v Ljubljani, Ljubljana, 2001
- [6] Козић, Ђ. Г. *Термодинамика, инжењерски аспекти*, Машински факултет, Београд, 2007.
- [7] Abbott, M. M., Van Ness, H. C., *Thermodynamics*, Schaum's Outline series, McGraw-Hill, Book Co., New York, USA, 1986
- [8] Baehr, H. D., *Thermodynamik*, (3. Aufl.), Springer-Verlag, Berlin, 1993
- [9] Black, W. Z., Hartley, J. G., *Thermodynamics*, Harper and Row, New York, USA, 1995
- [10] Bück, G., *Energetika, Muegyetemi Kiado*, Budapest, 1997
- [11] Doering, E., Schedwill, H., Dehl, M., *Grundlagen der Technischen Thermodynamik* (5. Auf), Teubner, Stuttgart, Deutschland, 2009
- [12] Fenn, J. B., *Engines, Energy and Entropy*, W. H. Freeman and Comp., New York, 2002.
- [13] Fermi, E., *Thermodynamics*, Dover Publ Inc., New York, USA, 1976

- [14] Karlekar, B. V., *Thermodynamics for Engineers*, Prentice–Hall Inc., Engelwood Cliffs, N. Y., USA, 1993
- [15] Michael, J. M., Howard, N. S., *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, John Wiley and Sons, New York, USA, 1999
- [16] Szargut, J., *Termodinamika*, PWN, Warszawa, 1995
- [17] Reynolds, W. C., *Thermodynamics*, McGraw-Hill, Book Co., New York, 1988
- [18] Žukovskij, V. S., *Termodinamika*, Energoatomizdat, Moskva, 1990
- [19] Вукалович, М. П., Новиков, И. И., *Техническая термодинамика*, изд. 4-ое, Энергия, Москва, 1988
- [20] Kortüm, G., Lachmann, H., *Einführung in die chemische Thermodynamik*, Verlag Chemie, Weinheim, 1998
- [21] Sandler, S., *Chemical and Engineering Thermodynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1999
- [22] Wood, B., *Application of Thermodynamics*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1992
- [23] Борђевић, Б. Д., Валент, В. Ј., Шербановић, С. П., *Термодинамика са термомехником*, ТМФ, Београд, 2007
- [24] Bejan, A., *Advanced Engineering Thermodynamics*, John Wiley and Sons, New York, USA, 1997
- [25] Rajput, R. K., *Engeneering Thermodynamics*, Jones and Bartlett Publishers, London, 2010
- [26] Rajput, R. K., *Thermal Engeneering*, Jones and Bartlett Publishers, London, 2009
- [27] Moran, M. J., *et al.*, *Engeneering Thermodynamics*, John Wiley and Sons, New York, USA, 2011
- [28] Cengel, Y. A., Boles, M. A., *Thermodynamics*, McGraw Hill Higher Education, New York, 2010
- [29] Borgnakke, C., *et al.*, *Fundamentals Thermodynamics*, John Wiley and Sons, New York, USA, 2009

Abstract

One Possibility for Graphical Representation of Real Gas Energy Values for Characteristic Change of the State

by

Branko B. PEJOVIĆ*, **Mitar D. PERUŠIĆ**, **Vladan M. MIĆIĆ**,
Goran S. TADIĆ, and **Stefan M. PAVLOVIĆ**

**Faculty of Technology, in Zvornik, University in East Sarajevo,
Republic of Srpska, Bosnia and Herzegovina**

In this paper, for the case of isothermal quasi static characteristic change of the state of real gas is given graphical representation respectively determination of the most important energy values in h - s and T - s diagrams.

At present, by using the fundamental theorem of differential calculus, the first and second law of thermodynamics is written in differential form, dependence is derived that allowed precise graphic design to determine the most important values of the process (technical work and amount of exchanged heat) to h - s diagram, over certain straight lines which represent the height differences.

Performed graphic design, is applied to two typical cases in the same diagram. Also, a comparison is performed with same change of state in the case of an ideal gas.

In the second part of this paper, starting from the fact that for the behavior of real gas, co-ordinate systems h, s and T, s are suitable but p, v systems, the proposal is given to the graphic representation of the changes of enthalpy and internal energy in heat T - s diagram. In this case, it is used the lines of constant enthalpy and internal energy *i. e.* that is their point of intersection with isobars, which passing through the endpoint of analyzed the change of state. It is shown that the change of enthalpy and internal energy in T - s diagram can be presented planimetry over the appropriate areas.

Based on the certain change of enthalpy and internal energy, by using the both form of the first law in thermodynamic, it is shown that in addition to the amount of exchanged heat, but it is possible for volume and technical work, for the proposed change of state of real gas, also can be represented graphically in T - s diagram, over suitable equivalent areas, which was the basic idea of this paper. Displayed graphics solutions in relation to the analytical solutions allows more efficient theoretical study of thermodynamic process which is observed from different points, they significantly assist for clear understanding of the problem and improve of mutual understanding.

Key words: real gases and vapors, isothermal quasistatic change, energy thermodynamic values, T-s and h-s diagrams, differential calculus, graphical representation of values, graphical construction

* Corresponding author: e-mail: b.pejovic@gmail.com