

Дубравка Мијуца¹, Душан Гајић², Марко Вукобраић²

¹ Математички факултет, Универзитет у Београду, Београд

² Институт „Кирило Савић”, Београд

Тродимензиона метода коначних елемената у термичкој анализи грађевинских објеката

Стручни рад

UDC: 692.21/.23:536.24/.25

BIBLID: 0350-218X, 29 (2003), 1-4, 119–134

Савремени захтеви пројектовања грађевинских објеката, као што су минимизација масе уз повећање отпорности, предвиђање квалитета и понашања конструкције на дуже време или под неубичајеним околностима, као што су сеизмичко оптерећење, ватра или експлозија, заштитно повећање енергетске ефикасности уз минимизацију коришћених материјала и енергента, утичу да се и у овој области све чешће, па и за мање објекте, користе неке од нумеричких метода рачунске механике. Свеска пракса је показала да, ако се методе рачунске механике користе правилно, пројектовање постаје брже, ефикасније и јефтиније, а квалитет пројектованог, реконструисаног или ревитализованог објекта се повећава.

Разматра се примена две стандардне нумеричке методе из области рачунске механике у изучавању шлојних губијака нехомогених омотача зграде, са циљем да се квантитативно оцени уштеда енергије која се добија оптимизацијом масе, цене и квалитета коришћених материјала омотача зграде. Добијени резултати показују да се коришћењем предложених програмских пакета, добијају поуздани резултати, уз могућности оптимизације односа: цена омотача / минимизација шлојних губијака, а у циљу повећања енергетске ефикасности грађевинских објеката.

Кључне речи: омотач зграде, ревитализација, нехомогени зид, пренос шлоје, рачунска механика, математички модел, нумеричка симулација, метода коначних елемената, шлојни губици, енергетска ефикасност грађевинских објеката

Увод

Циљ овог рада је да се детаљно изложи формулација коначних елемената у тродимензионом задатку простирања топлоте, као и да се на једноставним примерима

покаже да се коришћењем те математичке методе брзо и јефтино долази до процене односа енергетска ефикасност / цена омотача зграде.

Полази се од тога да се савремена архитектура и грађевинарство базира на одговорном ставу према животној околини. То истовремено подразумева високу енергетску ефикасност грађевинских објеката [1] где се подстиче примена различитих метода рачунске механике при оптималном избору материјала за градњу, уз истовремено коришћење природних извора енергије, рециклираних материјала, као и обезбеђивање здраве унутрашње околине кроз максимално коришћење природног осветљења и вентилације, уз избегавање употребе токсичних производа.

Пројектовање енергетски ефикасног грађевинског објекта подразумева и његово оптимално позиционирање сходно локалној метеоролошкој слици, а затим и пројектовање топлотног и/или расхладног оптерећења појединих просторија у објекту, како би се на основу тих резултата пројектовао и извео систем климатизације, грејања и хлађења (КГХ) [4, 5] који ће одржавати неопходне пројектне услове угодности. У том циљу дефинисани су стандарди и методе за прорачун, међу којима се најчешће примењују DIN 4701, DIN 1946, VDI 2078 и ASHRAE стандарди.

Поред тога, данас се све више користе нове симулационе методе, односно методе рачунске механике [2], које истовремено обрађују низ утицајних фактора променљивих у времену, као што су интензитет сунчевог зрачења, зрачење небеског свода, тла и околних површина, температура спољњег ваздуха, брзина ветра, број људи и време њиховог боравка у просторији, снага и режим рада осветљења и других унутрашњих топлотних извора. У том циљу развијају се математички модели који узмају у обзир велики број утицајних параметара. Такви модели се првенствено базирају на тродимензионалним једначинама нестационарног преноса топлоте кроз грађевинске елементе и на низу израза који дефинишу граничне услове на површинама тих елемената, где се анализирају механизми преноса топлоте, као што су кондукција, конвекција, зрачење сунца и околине, као и зрачење елемената унутар просторије.

С тим у вези, при пројектовању грађевинских објеката анализа топлотних губитака треба да се изведе узимајући у обзир улогу топлотне проводљивости, радијације, конвекције и влажности. Визуална инспекција и закључци експерата су недовољни. Потребно је да се добију квантитативне особине стања конструкције зграде, а основни параметри који се разматрају су:

- топлотна проводљивост елемената конструкције – коефицијент λ ,
- коефицијент размене ваздуха $n(l/h)$ за зграду или њен одређен део, и
- влажност конструкције зграде.

У овом раду су анализирани топлотни губици омотача зграде [6], услед преноса топлоте кондукцијом, конвекцијом и радијацијом. Пренос топлоте кондукцијом подразумева пренос топлоте кроз сам материјал, преношењем енергије са молекула који се брже крећу на молекуле који се крећу спорије. Брзи молекули предају део своје енергије и успоравају, а њихова енергија се користи за убрзање (и загревање) спорих молекула. Напоменимо, да се провођење топлоте кондукцијом, а коју карактерише коефицијент топлотне проводљивости λ , замењује у стандардним прорачунским изразима изведеном величином која се зове топлотна отпорност R , и једнака је $R = d/\lambda$, а где је d дебљина посматраног сегмента. Пренос топлоте конвекцијом подразумева пренос топлоте са флуида на чврсто тело или обрнуто, а преко границе тела која је у додиру са флуидом. Иначе, у инжењерској пракси, конвективни

пренос топлоте се карактерише *коэффицијентом пролаза топлоте* α и дефинише се одговарајућим изразима, на бази експерименталних резултата, посебно за вертикалне и хоризонталне, унутрашње и спољне површине елемената просторије. Трећи тип преноса топлоте је пренос топлоте радијацијом, у ком случају се топлота креће кроз простор према телу као електромагнетни талас, доспева до доступне површине тела где се врши пренос топлоте.

Због неефикасности и немогућности стандардних прорачунских метода да одреде поље температуре и поље топлотног флукса у свим контролним тачкама нехомогеног омотача зграде истовремено, нове нумеричке методе се базирају на тродимензионим физичким законима простирања топлоте, по температури и топлотном флуксу, а у којима се не користе изведене величине као што су нпр. коэффициент пролаза топлоте U и топлотна отпорност R , већ се оне израчунавају накнадно. Нумеричке методе које се већ више деценија користе у овој области су метода коначних разлика, и од скора и метода коначних елемената. Предност методе коначних елемената у односу на методу коначних разлика је што она није осетљива на компликованост облика геометрије посматраног модела, нпр. улазни углови, који у математичком смислу представљају сингуларне тачке по топлотном флуксу.

Циљ овог рада је да покаже поузданост и ефикасност тродимензионалне методе коначних елемената у анализи стационарног простирања топлоте кроз омотач зграде, којом приликом се израчунавају поља температуре и топлотног флукса, при чему се за израчунавање изведених величина, као што је коэффициент пролаза топлоте U , користи једноставан образац. Поред тога, биће приказани резултати верификације разматраних нумеричких приступа на стационарном моделу нехомогеног омотача зграде направљеног од више различитих материјала, а који садржи топлотне мостове.

Математички модел

Физички закон који доминира у процесу простирања топлоте кроз уочено механичко тело је закон одржања енергије [6, 7]. Закон одржања енергија мора бити задовољен у свакој материјалној тачки уоченог тела и у тзв. строгој форми представљен је следећом диференцијалном једначином:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + f = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Поред тога, конститутивна релација која даје везу између вектора топлотног флукса \mathbf{q} по јединици површине у изабраном правцу и градијента температуре ∇T за тај правац, зове се Фуријеов закон (за област тела Ω) дат је у облику:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (2)$$

Величина λ је симетричан тензор другог реда, представља карактеристику материјала и зове се коефицијент топлотног проводљивости, који се само у случају хомогеног изотропног тела своди на скаларну величину [6]. Поред тога, f је топлотна енергија произведена у јединичној запремини, ρ је густина материјала, коефицијент c_p је такође карактеристика материјала и представља специфичну топлоту материјала на константном притиску, док је t време. Параметри једначине (1) и (2), f , ρ , c_p и λ су у општем случају функције и положаја и температуре. Иначе, температура T је овде фундаментална променљива, тзв. примална величина, док је топлотни флуks \mathbf{q} њена дуална величина, што је од изузетне важности даље при одабиру простора функција за нумеричку дискретизацију [8].

Гранични услови у задатку простирања топлоте су дати како за температуру по елементу границе тела $\partial\Omega_T$, тако и за топлотни флуks по елементима границе тела $\partial\Omega_q$, $\partial\Omega_c$ и $\partial\Omega_r$, и то у облику:

$$T = \bar{T} \text{ на } \partial\Omega_T \quad (3)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_h = h \text{ на } \partial\Omega_q \quad (4)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_c = h_c(T - T_a) \text{ на } \partial\Omega_c \quad (5)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_r = h_r \sigma A (T^4 - T_0^4) \text{ на } \partial\Omega_r \quad (6)$$

Гранични услови у материјалним тачкама границе тела услед познате/задате температуре дати су релацијом (3). Гранични услови по топлотном флуksу, а по елементима површине границе тела дати су релацијама (4), (5) и (6), и то: задат/познат топлотни флуks, топлотни флуks услед прелаза топлоте конвекцијом и топлотни флуks услед прелаза топлоте зрачењем, респективно, где је \mathbf{n} јединична нормала посматране површине, h_c је коефицијент конвекције, h_r је бездимензионални коефицијент радијације, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ је Стефан-Болцманова (Stefan-Boltzmann) константа, T је непозната температура тела на посматраној површини, док је T_a амбијентална температура околине посматраног елемента површине. Ако се посматрано тело састоји од више различитих хомогених изотропних материјала, као што је случај у овом раду, тензор [6] другог реда λ се своди на скалар λ , који је различит за сваки материјал. Систем једначина (1–6), представља затворен систем једначина тродимензионалног простирања топлоте.

У овом раду усваја се претпоставка [9] да су све карактеристике материјала, а то су наведени коефицијенти λ , ρ и c_p , независне од температуре, јер се занемарљиво мало мењају у температурским опсезима који се појављују у грађевинским конструкцијама у нормалном радном режиму (у одсуству високих температура – пожар, или јаких и брзих удара у конструкцију – експлозија).

Слаба форма полазних једначина

Решење било које диференцијалне једначине је јединствено уколико су њени коефицијенти и десна страна једначине бесконачно диференцијабилне функције и

ако то решење задовољава диференцијалну једначину у свакој тачки домена, као и задате граничне услове. Међутим, у многим реалним ситуацијама један од ових услова није задовољен (тј., или не постоји решење јер један од података није непрекидно-диференцијабилан, или иако глатко решење постоји не може да се одреди његова тачна форма због комплексности домена, коефицијената или граничних услова). Дакле, наш захтев да решење проблема задовољава диференцијалну једначину у свакој тачки домена је прејак. Да бисмо превазишли ову потешкоћу проблем може да се преформулише тако да захтеви за решење буду слабији, јер када год постоји решење полазног проблема оно је решење и слабе формулације тог полазног проблема. Претпоставимо да су гранични услови (3) есенцијални и да су задовољени за сваку пробну функцију проблема, где је пробна функција она функција којом се апроксимира непозната величина у полазној диференцијалној једначини (у овом задатку то је непозната величина температуре сваке материјалне тачке полазног домена). У том случају, коришћењем Галеркинове процедуре, за коју важи да је тежинска (тест) функција којом множимо полазну једначину (1) из истог (физичког) поља функција, као и пробна функција, тражимо слабо решење израза (1) у облику:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{q} + f)\theta \, d\Omega = 0 \quad (7)$$

где се пробне функције температуре T , као и тест функције θ узимају из Хилбертовог простора H^1 , који је простор реалних квадратно интегралних функција које имају квадратно интегралне прве изводе, што значи да су из простора непрекидних (континуалних) функција чији су и први изводи непрекидни. У једн. (7) Ω представља област (домен) посматраног тела.

Ако се послужимо идентитетом по коме:

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}\theta) = \operatorname{div} \mathbf{q} \theta + \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \quad (8)$$

а из кога следи:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} \theta = \operatorname{div}(\mathbf{q}\theta) - \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \quad (8)$$

као и коришћењем теореме о дивергенцији [6], којом се у овом случају запремински интеграл преводи у површински:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}\theta) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\theta \, d\partial\Omega \quad (9)$$

долазимо до следећег извођења:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{q} \theta - f \theta) d\Omega = 0 \\
& \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{q} \theta) - \mathbf{q} \cdot \nabla \theta - f \theta) d\Omega = 0 \\
& \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q} \theta) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta d\Omega - \int_{\Omega} f \theta d\Omega = 0 \\
& \int_{\partial \Omega} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \theta d\partial \Omega - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta d\Omega - \int_{\Omega} f \theta d\Omega = 0 \\
& \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta d\Omega - \int_{\Omega} f \theta d\Omega - \int_{\partial \Omega} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \theta d\partial \Omega
\end{aligned} \tag{10}$$

Пошто тест функција θ има особину да је идентично једнака нули на граници (нестаје на граници), последњи израз се своди на:

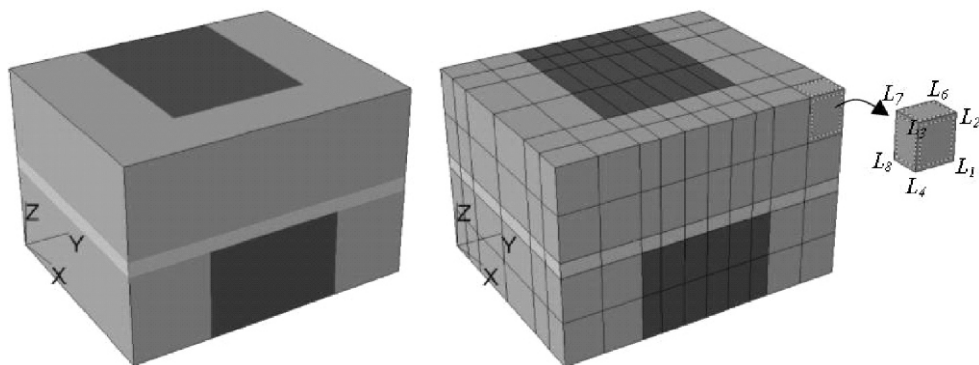
$$\int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta d\Omega - \int_{\Omega} f \theta d\Omega \tag{11}$$

Коришћењем Фуријеовог закона (2), долазимо до линеаризоване једначине закона баланса енергије у слабој форми у облику:

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla \theta d\Omega - \int_{\Omega} f \theta d\Omega \tag{12}$$

Примална метода коначних елемената

Ако сада дискретизујемо полазни домен Ω , мрежом елемената Ω_e [3] уз услов да је задовољен услов компатибилности тест и пробних функција температуре, по коме оне морају бити континуалне преко граница и унутар коначних елемената, добијамо мрежу коначних елемената, која се састоји од домена (области) свих елемената, глобалних чворова мреже и локалних чворова L сваког од елемената (види сл. 1. на којој је приказан репрезентативни део зида, пре и после дискретизације методом коначних елемената).



Слика 1. Дискретизација полазне области (полазног домена) методом коначних елемената

Ако пробне и тест функције температуре узмемо из ужег, коначно-димензионог простора функција полинома $P_L(x)$, за које важи да су једнаки јединици у свом чвору, а једнаки нули у свим осталим чворовима елемента (услед тога ће резултујућа матрица система бити ретка), тако да важи:

$$\begin{aligned} T(x) &= T^L(x)P_L(x), L = 1, NLN \\ \theta(x) &= \theta^L(x)P_L(x), L = 1, NLN \end{aligned} \quad (13)$$

што нам дају везу између поља температуре у свакој тачки модела, и непознате вредности температуре у чвору L коначног елемента, где је NLN број локалних чворова по коначном елементу (на сл. 1, $NLN = 8$), долазимо до система линеарних алгебарских једначина по непознатим вредностима температуре по глобалним чворовима, а који записан у матричној форми има следећи облик:

$$[K]\{T\} = \{F\} \quad (14)$$

где су улази у матрицу система $[K]$ и вектор система $\{F\}$ дати са:

$$K_{LM} = \int_{\Omega_e} P_{L,\alpha} \lambda^{(e)} P_{M,\alpha} \partial \Omega_e, \quad F_M = \int_{\Omega_e} P_M f d\Omega_e \quad (15)$$

док је $\{T\}$ вектор непознатих температура. Једначина (14) биће онолико колико има глобалних чворова у коначно-елементној мрежи, где је $\lambda^{(e)}$ вредност коефицијента топлотне проводљивости по посматраном коначном елементу (e).

Из разлога што је матрица система $[K]$ квадратна, позитивно-дефинитна, симетрична и ретка, за решавање система (14), уобичајено се користе разни поступци директног решавања система линеарних једначина, при чему се велика пажња посвећује минимизацији ширине траке матрице система $[K]$ (не-нула чланова) око главне дијагонале, а што се постиже оптималном ренумерацијом глобалних чворова у коначно-елементној мрежи, а у циљу смањења дужине извршавања прорачуна на рачунару. Стога је кориснику програмског пакета „Straus7” [13] омогућено да контролоше исправност избора начина нумерације глобалних чворова.

Изложеним поступком израчунава се само поље температуре по глобалним чворовима коначно-елементне мреже, док топлотни флуks мора да се израчуна накнадно и то по сваком од коначних елемената посебно. Такав поступак израчунавања доводи до нереалне дисконтинуалности израчунатог топлотног флуksа (и тамо где нема скока услед промене материјала). Иначе, наведени недостатак се исправља коришћењем разних метода усредњавања уз губитак тачности.

И поред постојећих страних комерцијалних и академских програмских пакета из ове области, домаћи развој методе коначних елемената у области прорачуна простирања топлоте није запостављен. У оквиру пројекта ИО1865 Министарства за

науку и заштиту животне средине Републике Србије, развијен је оригинални и поуздан тродимензионални метод коначних елемената [10–12], код кога су и температура и топлотни флуks фундаменталне променљиве, па се недостатак нереалне дисконтинуалности не појављује. Поред тога, наведени домаћи софтвер, потпуно је интегрисан са програмским пакетом „Straus7” [13], па се пре и пост-процесирање обавља и даље у његовом окружењу, које је данас једно од најбоље кориснички оријентисаних у свету.

Нумерички пример

У овом примеру приказује се примена и тачност две методе рачунске механике за нумеричку симулацију протока топлоте кроз нехомогени зид, и то методе коначних разлика и методе коначних елемената. Коришћена су три програмска пакета, један написан по методи коначних разлика „Heat3” [14, 15], и два по методи коначних елемената, и то програмски пакет „Straus7” [13] и домаћи академски програмски пакет „FEMIX HSc/T” [10]. Разматра се зависност коефицијента пролаза топлоте U у односу на избор материјала и цене омотача зграде.

Посматра се нехомогени зид од стандардних материјала [16], као што су глина (цигла), изолација (полистирол), малтер, са или без минералне вуне. Циљ овог задатка је да се покаже да нумеричка симулација омогућава брзу, јефтину и тачну оптимизацију омотача зграде са становишта цена / енергетска ефикасност.

На сл. 2. је приказан шупљи лако експандирани блок од глине испуњен полистиролом, који смањује проток топлоте кроз блок.

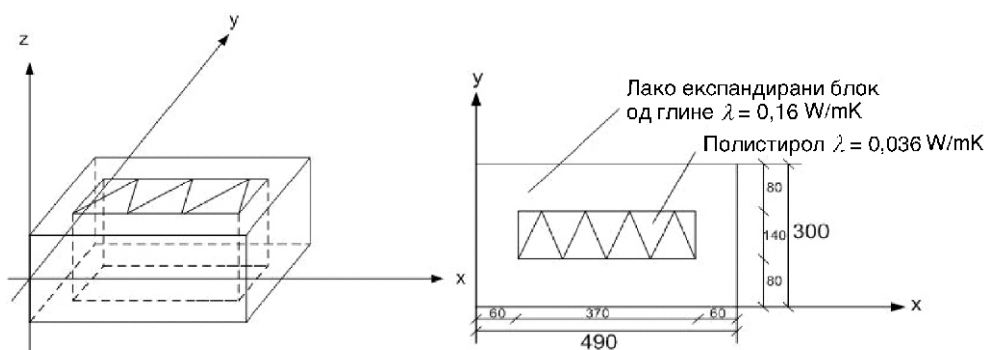
На сл. 3. је приказан зид састављен од оваквих блокова, чији је репрезент (приказан десно на истој слици) разматран у овом примеру. Блокови су постављени тесно један уз други, повезани релативно дебелим хоризонталним слојем малтера, док вертикалних слојева малтера нема или их занемарујемо. Топлота се преноси главним делом у y правцу.

Малтер између блокова представља топлотни мост са одговарајућим топлотним протоком који може да се умањи постављањем траке минералне вуне у слој малтера (сл. 4). Очекујемо да ће се вредност коефицијента пролаза топлоте U смањити уметањем трака од минералне вуне у слој малтера, а тиме наравно смањити и топлотни губици овог тест модела. Прорачун је извршен за осенчени део приказан на сл. 3.

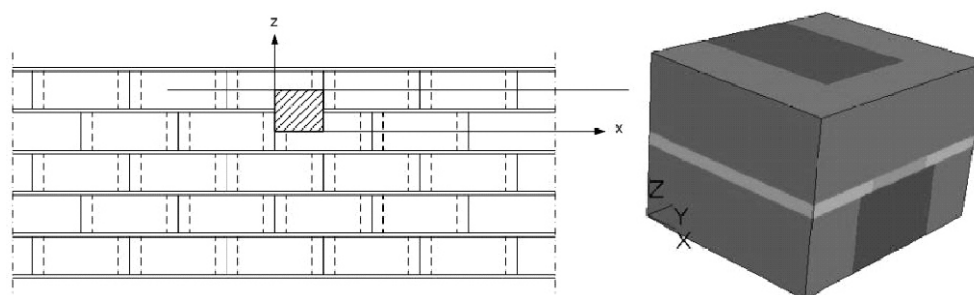
Постоје равни симетрије на $x = 0$ и $x = 245$ mm, као и на $z = 0$ и $z = 200$ mm, приказане на сл. 4. и 5. Гранични услови у овим равнима су адијабатски. Граничне температуре (задато температурно поље) су постављене на вредности $T_{y=300} = 0$ K и $T_{y=0} = 1$ K (сл. 4).

Европски стандард CEN, из 1996. године [16], у коме је решење добијено поједностављеним изразима, даје за услове у овом задатку за вредност коефицијента топлотне проводљивости $U_{CEN} = 0,355$ за модел без минералне вуне, као и вредност $U_{CEN} = 0,296$ за модел са минералном вуном.

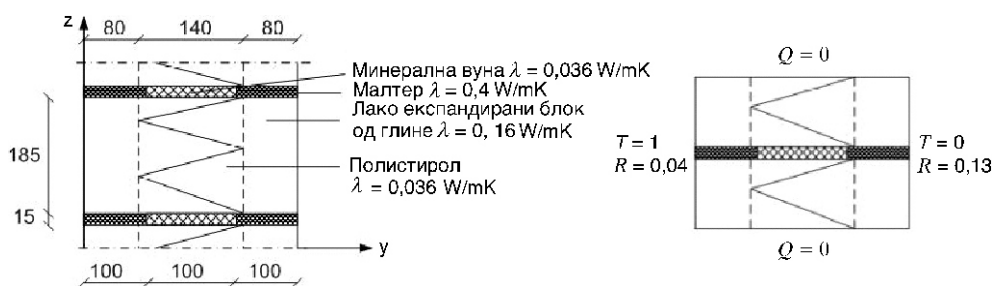
Сложени процес преноса топлоте конвекцијом са спољне и унутрашње стране нехомогеног зида изражен је коефицијентом топлотне отпорности $R_{y=0} = 0,04$ са спољне стране и $R_{y=300} = 0,13$ са унутрашње стране посматраног зида (види сл. 4. и 5).



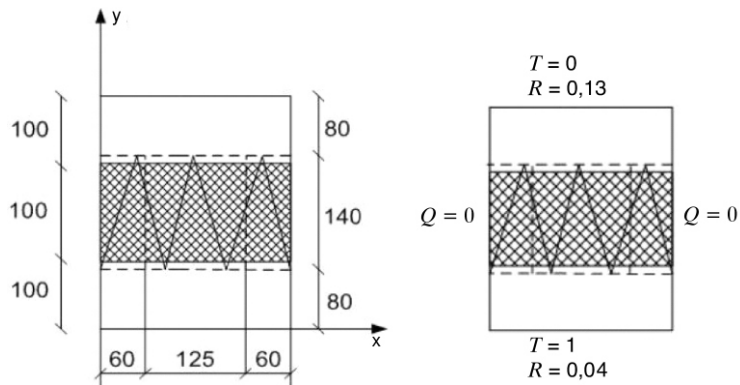
Слика 2. Шупљи блок од глине испуњен полистиролом



Слика 3. Посматрани зид састављен од шупљих блокова испуњених полистиролом



Слика 4. Карактеристичан пресек зида у равни y-z



Слика 5. Карактеристични пресек зида у равни x–y

У поменутиим програмским пакетима израчунавају се температура и топлотни флукс у одређеном броју тачака модела услед пролаза топлоте кондукцијом, а за дате вредности топлотних отпорности улазе у прорачун коефицијента пролаза топлоте U , преко следећег обрасца:

$$U = \frac{1}{(R_{y,0} + R_{y,300}) + R_{\lambda}}, \quad \text{где је } R_{\lambda} = \frac{1}{U_{\lambda}} \quad \text{и} \quad U_{\lambda} = \frac{Q_{\lambda}}{A_{x-z}(T_{y,0} - T_{y,300})} \quad (16)$$

где је Q_{λ} вредност топлотног протока на унутрашњој (или спољашњој) страни зида дате површине $A_{x-z} = 0,049$ (у равни x–z).

За овај модел у раду [14] реферисане су вредности коефицијената пролаза топлоте израчунате програмским пакетом „Heat3”, и то за модел без минералне вуне презентирана је вредност коефицијента пролаза топлоте $U = 0,366$, која у односу на теоријско решење U_{CEN} [16] има релативну процентуалну грешку од 3,1%. За модел где је у слој хоризонталног малтера убачена трака минералне вуне, у истом раду (види табл. 1) се за неколико нумеричких мрежа растуће густине, дате су вредности коефицијента пролаза топлоте U , као и релативне процентуалне грешке E коефицијента пролаза топлоте у односу на теоријско решење U_{CEN} .

Таблица 1. U -вредности добијене програмским пакетом „Heat3” за модел зида са минералном вуном

Број елемената	U [W/m ² K]	E [%]
175	0,2950	0,34
1080	0,2975	0,51
7200	0,2999	1,32
56 160	0,3007	1,59
421 875	0,3011	1,72
1 000 000	0,3012	1,76
Теоријско решење [16]	0,3550	

У табл. 2, дате су вредности коефицијента пролаза топлоте U за модел без минералне вуне као и времена извршавања прорачуна, добијене програмским пакетом „Straus7” [13], а за три коначно-елементне мреже растуће густине.

Таблица 2. U -вредности добијене програмским пакетом „Straus7” за модел зида без минералне вуне

Број елемената	U [W/m ² K]	E [%]	Време прорачуна [s]
300	0,3704	4,33	0,5
480	0,3699	4,19	1,0
3840	0,3686	3,82	5,0
Теоријско решење [16]	0,3550		

У табл. 3, дате су вредности коефицијента пролаза топлоте U добијене програмским пакетом „Straus7”, за случај када је у слој хоризонталног малтера убачена трака минералне вуне, а за исте три коначно-елементне мреже растуће густине.

Таблица 3. U -вредности добијене програмским пакетом „Straus7” за модел зида са минералном вуном

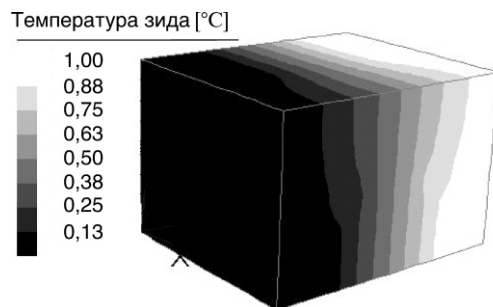
Број елемената	U [W/m ² K]	E [%]	Време прорачуна [s]
300	0,3065	3,55	0,5
480	0,3056	3,24	1,0
3840	0,3035	2,53	5,0
Теоријско решење [16]	0,2960		

Из добијених резултата закључујемо да се и коришћењем програмског пакета „Heat3” и „Straus7”, добијају резултати који са профињавањем мреже конвергирају без осциловања. Међутим, резултати добијени програмским пакетом „Straus7” униформно конвергирају теоријској вредности, што није случај са резултатима добијеним програмом „Heat3” који конвергирају некој другој вредности, а не теоријској.

Такође, програмски пакет „Straus7” је специјализован и за друге типове грађевинске анализе (термо-еластичну, сеизмичку ...), што повећава његову интероперабилност [17], а што није случај са програмским пакетом „Heat3”.

Поред тога, једна од добрих особина програмских пакета из нумеричких симулација је и графичка визуализација добијених резултата, која нам омогућава брзу идентификацију области модела у којима се јављају локални екстреми поља променљивих која анализирамо, а у овом случају то су температура и топлотни флуks.

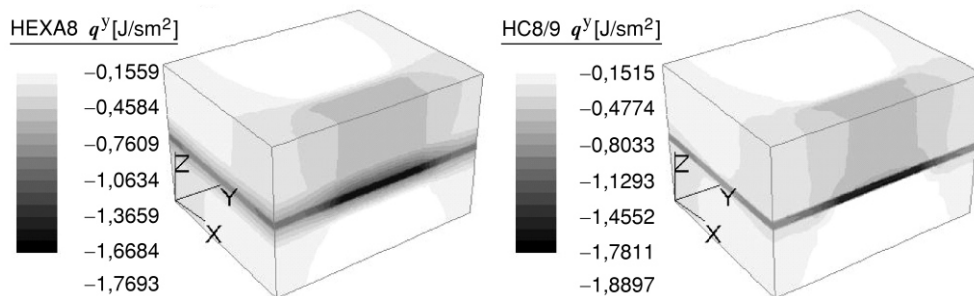
На сл. 6. дате су расподеле температуре и топлотних флуkсева у описаном моделу нехомогеног зида добијене нумеричком симулацијом помоћу програма „Straus7”.



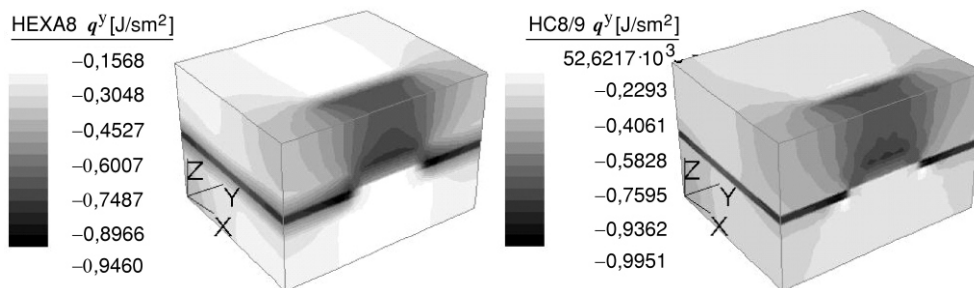
Слика 6. Поље расподеле температуре у проблему репрезента нехомогеног зида

На сл. 7 и 8. приказан је распоред изо-линија компоненте вектора флукса q^y за модел са 3840 елемената, израчунат у програмском пакету „Straus7” и домаћем програмском пакету „FEMIX HC8/9” написаном по мешовитој методи коначних елемената [12], где се уочава добро слагање резултата, а што иде у прилог потврди теоријских резултата из стандарда CEN [16].

Полистирен унутар блока, као и минерална вуна, значајно смањују ефекат топлотног моста, што је показано израчунавањем у сва три коришћена програмска пакета („Heat3”, „Straus7” и „FEMIX HC8/9”).



Слика 7. Резултати за репрезент зида без минералне вуне израчунати у програмима „Straus7” и „FEMIX HC8/9”



Слика 8. Резултати за репрезент зида са минералном вуном израчунати у програмима „Straus7” и „FEMIX HC8/9”

Вредност коефицијента пролаза топлоте израчунат у програму „Straus7”, а за најфинију мрежу од коначних елемената, смањује се са $U = 0,3686$ на $U = 0,3035$, што је релативно смањење од 21,45%. У програмском пакету „Heat3”, за најфинију реферисану мрежу од милион елемената релативно смањење износи 21,52%. Док европски стандард CEN [16], за исти пример наводи релативно смањење коефицијента пролаза топлоте U од 19,93%.

Од интереса је израчунати колико се повећава цена посматране конструкције, ако се у циљу смањења топлотних губитака у хоризонтални слој малтера уграде траке од минералне вуне. Цена једног блока (са полистиреном) износи 120 динара, цена продужног малтера по целом блоку без изолације износи 15 динара, док цена продужног малтера по целом блоку са минералном вуном износи 30 динара, што цену зида стандардне површине $3,18 \cdot 2,6 \text{ m}^2$ повећава са 11.407,00 на 12.675,00 динара односно за 11,12%.

Из ове анализе прорачуна коефицијента пролаза топлоте коришћењем програмског пакета „Straus7” произилази да се повећањем цене зида за 11,12%, топлотни губици смањују чак за 21,45%, са напоменом да се овде умањивао само ефекат топлотног моста хоризонталног слоја малтера између блокова.

У грејној сезони топлотни губици у овом примеру изучаваног зида наведене стандардне површине се смањују са 288 kWh/год. на 237,13 kWh/год.

Нека је C разлика у цени, где је C_j јединична цена топлотне енергије у динарима, а Q разлика топлотних губитака. Из следећег обрасца [4] добија се период отплате τ за зид са минералном вуном у односу на онај без минералне вуне:

$$\tau = \frac{C}{C_j} \cdot \frac{Q}{1268,00} \cdot 5 \text{ година} \quad (17)$$

На основу приказаних резултата јасно се види повећање енергетске ефикасности грађевинског објекта инвестиционим улагањем у омотач зграде, чији је период отплате за наведене услове пет година. Међутим, треба имати у виду да се овде интервенисало само у хоризонталним слојевима конструкције, а да би се још приметнија побољшања енергетске ефикасности добила модификацијом у вертикалном правцу.

Закључак

У овом раду је на једном једноставном примеру нехомогеног омотача зграде, приказана употреба методе коначних елемената у анализи и побољшању енергетске ефикасности грађевинских објеката. Показано је да се описана метода може сматрати јефтиним, ефикаснијом и прецизнијом у односу на стандардне прорачунске методе. Такође, показано је да она пружа широке могућности у процесу пројектовања нових грађевинских објеката и предвиђању њиховог термичког понашања. Једноставним примером улазних карактеристика материјала, геометрије и граничних услова, анализира се и оптимизира њихов утицај, уз тродимензионалну визуализацију израчу-

натих температура и топлотног флуksа испитиване конструкције, без обзира на компликованост геометрије и тип термичког оптерећења. Применом предложеног симулационог модела при пројектовању омотача зграде, као и система КГХ, омогућена је јефтина оптимизација облика и квалитета омотача зграде у смислу цена / енергетска вредност.

Ознаке

A	– површина, [m ²]
C	– цена
C_j	– јединична цена
c_p	– специфична топлота на константном притиску, [J/kgK]
d	– дебљина посматраног сегмента, [m]
E	– релативна грешка, [-]
(e)	– коначни елемент
f	– топлотни извор, [W/m ³]
h	– топлотни флуks на зиду, [W/m ²]
h_c	– коефицијент конвекције, [W/m ² K]
h_r	– коефицијент радијације, [-]
H^1	– Хилбертов простор
L	– локални чворови
NLN	– број локалних чворова
n	– јединични вектор, нормала на посматрану површину
n	– коефицијент размене ваздуха, [1/h]
P_L	– простор функција полинома
q	– вектор топлотног флуksа, [W/m ²]
Q_λ	– топлотни проток на зиду, [W]
q_e, q_r, q_h	– конвективни флуks, радијациони флуks, укупни флуks, [W/m ²]
R	– топлотна отпорност, [m ² K/W]
T	– температура, [K]
t	– време, [s]
U	– коефицијент пролаза топлоте, [W/m ² K]
Y, q^y	– флуks на зиду у у-правцу, [W/m ²]

Грчки симболи

α	– коефицијент прелаза топлоте, [W/m ²]
λ	– коефицијент топлотне проводљивости, [W/mK]
σ	– Стефан-Болцманова константа, [W/m ² K ⁴]
ρ	– густина материјала, [kg/m ³]
θ	– тест функција
Ω	– домен

Захвалница

Аутори текста се захваљују Министарству за науку и заштиту животне средине Републике Србије на подршци овим истраживањима, а кроз пројекат ЕЕ197. Такође, се захваљују проф. др Браниславу Годоровићу на научној и стручној помоћи.

Литература

- [1] Ока, S., National Energy Efficiency Program: Foundation, Strategy, Priorities Formulation, and Implementation Activities, *Termotehnika*, 28 (2002), 1-4, pp. 13–23
- [2] Hellen, T., How to Use Elements Effectively. NAFEMS Ltd. – The International Association for Engineering Analysis Community, <http://www.nafems.org>, 2002
- [3] Oden, J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York, 1972
- [4] Тодоровић, Б., Пројектовање постројења за централно грејање, Машински факултет Универзитет у Београду, 1966.
- [5] Тодоровић, М., Живковић, Б., Предности нумеричке симулације термичког понашања зграде при пројектовању система за климатизацију, *Зборник радова*, 32. конгрес о грејању, хлађењу и климатизацији, Београд, 2001.
- [6] Јарић, Ј., Механика континуума, Грађевинска књига, Београд, 1988.
- [7] John, H. Lienhard IV, John, H. Lienhard V., A Heat Transfer Textbook, Phlogiston Press, Cambridge, Ma., USA, 2003
- [8] Arnold, D. N., Mixed Finite Element Methods for Elliptic Problems, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 82 (1990), pp. 281–300
- [9] Balocco, C., A Simple Model to Study a Ventilated Facade Energy Performance, *Energy and Buildings*, 34 (2002), pp. 469–475
- [10] Mijuca, D., Finite Element Analysis System *in-house* Software Package FEMIX-HC8/9, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, <http://www.matf.bg.ac.yu/@dmijuca>, Belgrade, Serbia and Montenegro
- [11] Mijuca, D., On Hexahedral Finite Element HC8/27 in Elasticity, *Computational Mechanics*, 33 (2004), 6, pp. 466–480
- [12] Mijuca, D., Žibera, A., Medo, B., A New Mixed Hexahedral Finite Element in Heat Transfer Analysis, 1st International Conference on Advanced Concepts in Mechanical Engineering, *Proceedings*, Iasi, Romania, July 6-8, 2004, *accepted for publication*
- [13] G+D Computing, Straus7, Finite Element Analysis System Software Package, Australia <http://www.strand.aust.com>
- [14] Blomberg, T., Heat Conduction in Two and Three Dimensions – Computer Modelling of Building Physics Applications, Ph. D. thesis, Lund University, Sweden, 1996
- [15] Blomberg, T., Computer Programs for Transient and Steady-State Heat Conduction in Three Dimensions HEAT3, <http://www.buildingphysics.com/heat3.htm>, Department of building physics, Lund University, Sweden
- [16] ***, CEN, 1996, Building Components and Building Elements – Thermal Resistance and Thermal Transmittance – Calculation Method. European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, Ref. No. EN ISO 6946:1996
- [17] Bazjanac, V., Building Energy Performance Simulation as Part of Interoperable Software Environments, *Building and Environment*, 39 (2004), 8, pp. 879–883

Abstract

Threedimensional Finite Element Method in the Heat Analysis of Buildings

by

Dubravka MIJUČA¹, Dušan GAJIĆ², and Marko VUKOBRAT²

¹ Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Belgrade, Serbia and Montenegro

² Kirilo Savić Institute, Belgrade, Serbia and Montenegro

In the present paper, the usage of the finite element method in analysis and improvement of energetic efficiency of buildings is demonstrated on the simple example of inhomogeneous wall suggested by the European Committee for Standardization. It was shown that described method may be considered cheap, efficient and more precise than standard “hand-out” calculations. In addition, it was shown that it enables a wide opportunities in the process of designing of new buildings and evaluation of its thermal behavior. With the simple change of input parameters as material characteristics, geometry and boundary values, its influence on the building’s overall behavior is analyzed and optimized, regardless of the type of complexity of geometry and type of thermal load, with simultaneous visualization of the temperature and heat flux field.

Key words: building's envelope, revitalization, inhomogeneous wall, heat transfer, computational mechanics, mathematical model, numerical simulation, finite element method, heat losses, energy efficiency of buildings

Одговорни аутор / Corresponding author (D. Mijuca)
E-mail: dmijuca@matf.bg.ac.yu